EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)
B.O. n° 34 du 2 octobre 1986

Les candidats devront justifier soigneusement toutes leurs affirmations. Il ne sera tenu aucun compte des résultats qui n'auront pas été justifiés par un raisonnement précis et rigoureux.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

Partie I

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$. Soit α un réel donné, on considère la matrice :

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha - n^2 \\ 0 & 1 & -1 - n^2 \end{bmatrix}$$

Soit f_α l'endomorphisme de E ayant pour matrice $A(\alpha)$ dans la base $\mathcal{U}$.

I-1) a) Déterminer le rang de f_α suivant les valeurs de α.

b) Déterminer le noyau et l'image de f_α suivant les valeurs de α. On précisera dans tous les cas une base et la dimension du noyau et de l'image de f_α.

I-2) a) Déterminer les valeurs propres de f_α en précisant l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre suivant les valeurs de α.

b) Déterminer les sous-espaces propres de f_α en précisant une base et la dimension de chaque sous-espace propre suivant les valeurs de α.

c) Peut-on trouver une base de E formée de vecteurs propres de f_α ? Déterminer une telle base lorsqu'elle existe.

I-3) On suppose dans cette question : $\alpha = n^2 - 1$.

a) Déterminer une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que la matrice de f_{n^2-1} dans $\mathcal{V}$ soit :

$$B = \begin{bmatrix} -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -n^2 & 1 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{bmatrix}$$

On choisira ces vecteurs v_1, v_2, v_3 le plus simplement possible.

b) Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un élément de E dans la base $\mathcal{U}$ et (X, Y, Z) les coordonnées de cet élément dans la base $\mathcal{V}$, quelles relations a-t-on entre (x, y, z) et (X, Y, Z) ?

I-4) Intégrer le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -n^2 x \\ \frac{dy}{dt} = -y + (1 - n^2)z \\ \frac{dz}{dt} = y - (1 + n^2)z \end{cases}$$

Partie II

On considère le système différentiel $(\mathcal{S}_0)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dt^2} = -n^2 X \\ \frac{d^2Y}{dt^2} = -n^2 Y + Z \\ \frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 Z \end{cases}$$

où X, Y et Z désignent des fonctions réelles de la variable réelle t.

Tournez la page S.V.P.

II-1) Intégrer (δ_0)

II-2) On note (X_n , Y_n , Z_n) la solution de (δ_0) vérifiant les conditions suivantes :

$Y_n(0) = \frac{k}{n}$, $\frac{dY_n}{dt}(0) = \mu + \frac{1}{n^2}$, $Z_n(0) = \frac{2}{n}$, $\frac{dZ_n}{dt}(0) = -2$, k et μ étant deux constantes réelles indépendantes de t et de n.

a) Déterminer l'expression de Y_n et de Z_n.

b) Etudier suivant les valeurs de k et de μ la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} Y_n(t)$ sur l'intervalle $[0 , 2\pi]$.

c) Etudier suivant les valeurs de k et de μ la convergence des séries numériques :

$\sum_{n\geq 1} Y_n(\pi)$ et $\sum_{n\geq 1} Y_n(2\pi)$.

Partie III

On considère le système différentiel (δ_1) :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -n^2 x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = (1-n^2)y - z \\ \frac{d^2z}{dt^2} = y - (1+n^2)z \end{cases}$$

On note : $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\qquad \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{bmatrix}$

et on reprend les notations de la partie I.

III-1) Montrer que l'on peut écrire le système (δ_1) sous la forme : $\frac{d^2M}{dt^2} = C.M$,

où C est une matrice que l'on déterminera.

Comparer la matrice C et les matrices $A(\alpha)$.

III-2) a) (x , y , z) représentant les coordonnées d'un élément M dans la base $\mathcal{U}$ et (X , Y , Z) les coordonnées de M dans la base $\mathcal{V}$, écrire le système différentiel vérifié par les fonctions X , Y et Z.

b) En déduire X, Y, Z puis x , y , z.

III-3) a) Déterminer la solution de (δ_1) vérifiant les conditions suivantes :

$x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = n$, $\frac{dy}{dt}(0) = 1 - 3n^2$, $\frac{dz}{dt}(0) = 1 - n^2$.

b) On considère dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à repère orthonormal $(0, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ la courbe (Γ), ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) sont les fonctions définies au III-3)a). Montrer que (Γ) est une courbe plane et déterminer une équation cartésienne du plan contenant (Γ).

c) On suppose n = 1. Construire avec soin la projection orthogonale sur le plan $(0 , \vec{i} , \vec{k})$ de la partie de (Γ) correspondant à :

$t \in [-2\pi , 2\pi]$.

On précisera les abscisses et paramètres de tous les points remarquables, ainsi que les tangentes en ces points.

On déterminera en particulier les abscisses des points d'intersection avec l'axe $(0 , \vec{i})$.

d) En supposant toujours n = 1 , calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} (z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt})\ dt$$

Que représente cette intégrale ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail